Topologías débiles

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

Recuerda que si X es un espacio normado y $x \in X$ se verifica que

$$\|x\| = \text{máx}\{|x^*(x)| : \|x^*\| \leqslant 1\} = \text{máx}\{|[J(x)](x^*)| : \|x^*\| \leqslant 1\}$$

Recuerda que si X es un espacio normado y $x \in X$ se verifica que

$$\|x\| = \text{máx}\{|x^*(x)| : \|x^*\| \leqslant 1\} = \text{máx}\{|[J(x)](x^*)| : \|x^*\| \leqslant 1\}$$

Igualdad que nos dice que el funcional $J(x) \in X^{**}$ alcanza su norma en B_{X^*}.

Recuerda que si X es un espacio normado y $x \in X$ se verifica que

$$\|x\| = \text{máx}\{|x^*(x)| : \|x^*\| \leqslant 1\} = \text{máx}\{|[J(x)](x^*)| : \|x^*\| \leqslant 1\}$$

Igualdad que nos dice que el funcional $J(x) \in X^{**}$ alcanza su norma en B_{X^*}.

Si ahora $x^* \in X^*$, sabemos que existe $f \in X^{**}$ tal que $\|f\| = 1$, y $f(x^*) = \|x^*\|$.

Recuerda que si X es un espacio normado y $x \in X$ se verifica que

$$\|x\| = \text{máx}\{|x^*(x)| : \|x^*\| \leqslant 1\} = \text{máx}\{|[J(x)](x^*)| : \|x^*\| \leqslant 1\}$$

Igualdad que nos dice que el funcional $J(x) \in X^{**}$ alcanza su norma en B_{X^*}.

Si ahora $x^* \in X^*$, sabemos que existe $f \in X^{**}$ tal que $\|f\| = 1$, y $f(x^*) = \|x^*\|$.Si el espacio X es reflexivo, dicho funcional será de la forma $f = J(x)$ para algún $x \in X$ con $\|x\| = 1$, y deducimos que

$$\|x^*\| = \text{máx}\{|x^*(x)| : \|x\| \leqslant 1\} \quad (x^* \in X, X \textit{ reflexivo})$$

Recuerda que si X es un espacio normado y $x \in X$ se verifica que

$$\|x\| = \max\{|x^*(x)| : \|x^*\| \leqslant 1\} = \max\{|[J(x)](x^*)| : \|x^*\| \leqslant 1\}$$

Igualdad que nos dice que el funcional $J(x) \in X^{**}$ alcanza su norma en B_{X^*}.

Si ahora $x^* \in X^*$, sabemos que existe $f \in X^{**}$ tal que $\|f\| = 1$, y $f(x^*) = \|x^*\|$.Si el espacio X es reflexivo, dicho funcional será de la forma $f = J(x)$ para algún $x \in X$ con $\|x\| = 1$, y deducimos que

$$\|x^*\| = \max\{|x^*(x)| : \|x\| \leqslant 1\} \quad (x^* \in X, X \textit{ reflexivo})$$

Es decir x^* alcanza su norma en B_X.

Sea X un conjunto no vacío, $(Y, \mathcal{T})$, un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una familia de aplicaciones de X en Y, Sea X un conjunto no vacío, $(Y, \mathcal{T})$, un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una familia de aplicaciones de X en Y,la **topología inicial** en X parar la familia $\mathcal{F}$ es la topología más pequeña, es decir, con menos abiertos, para la cual todas las funciones de $\mathcal{F}$ son continuas.

Sea X un conjunto no vacío, $(Y, \mathcal{T})$, un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una familia de aplicaciones de X en Y,la **topología inicial** en X parar la familia $\mathcal{F}$ es la topología más pequeña, es decir, con menos abiertos, para la cual todas las funciones de $\mathcal{F}$ son continuas.Notaremos dicha topología por $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.

Sea X un conjunto no vacío, $(Y, \mathcal{T})$, un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una familia de aplicaciones de X en Y,la **topología inicial** en X parar la familia $\mathcal{F}$ es la topología más pequeña, es decir, con menos abiertos, para la cual todas las funciones de $\mathcal{F}$ son continuas.Notaremos dicha topología por $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.Para todo abierto $\omega \in \mathcal{T}$ y para toda $f \in \mathcal{F}$, el conjunto $f^{-1}(\omega)$ ha de estar en $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ y también deben estar en $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ los conjuntos de la forma

$$\bigcap_{i=1}^{q} f_i^{-1}(\omega_i), \text{ donde } f_i \in \mathcal{F} \quad \text{y} \quad \omega_i \in \mathcal{T} \text{ para } \quad 1 \leqslant i \leqslant q \tag{1}$$

Sea X un conjunto no vacío, $(Y, \mathcal{T})$, un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una familia de aplicaciones de X en Y,la **topología inicial** en X parar la familia $\mathcal{F}$ es la topología más pequeña, es decir, con menos abiertos, para la cual todas las funciones de $\mathcal{F}$ son continuas.Notaremos dicha topología por $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.Para todo abierto $\omega \in \mathcal{T}$ y para toda $f \in \mathcal{F}$, el conjunto $f^{-1}(\omega)$ ha de estar en $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ y también deben estar en $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ los conjuntos de la forma

$$\bigcap_{i=1}^{q} f_i^{-1}(\omega_i), \text{ donde } f_i \in \mathcal{F} \text{ y } \omega_i \in \mathcal{T} \text{ para } 1 \leqslant i \leqslant q \tag{1}$$

Se comprueba sin dificultad que las uniones de conjuntos de esta forma son ya una topología en X que es, precisamente, la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.

Sea X un conjunto no vacío, $(Y, \mathcal{T})$, un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una familia de aplicaciones de X en Y,la **topología inicial** en X parar la familia $\mathcal{F}$ es la topología más pequeña, es decir, con menos abiertos, para la cual todas las funciones de $\mathcal{F}$ son continuas.Notaremos dicha topología por $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.Para todo abierto $\omega \in \mathcal{T}$ y para toda $f \in \mathcal{F}$, el conjunto $f^{-1}(\omega)$ ha de estar en $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ y también deben estar en $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ los conjuntos de la forma

$$\bigcap_{i=1}^{q} f_i^{-1}(\omega_i), \text{ donde } f_i \in \mathcal{F} \quad \text{y} \quad \omega_i \in \mathcal{T} \text{ para } \quad 1 \leqslant i \leqslant q \tag{1}$$

Se comprueba sin dificultad que las uniones de conjuntos de esta forma son ya una topología en X que es, precisamente, la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.Por tanto, dichos conjuntos forman una base de abiertos de la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.

Sea X un conjunto no vacío, $(Y, \mathcal{T})$, un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una familia de aplicaciones de X en Y,la **topología inicial** en X parar la familia $\mathcal{F}$ es la topología más pequeña, es decir, con menos abiertos, para la cual todas las funciones de $\mathcal{F}$ son continuas.Notaremos dicha topología por $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.Para todo abierto $\omega \in \mathcal{T}$ y para toda $f \in \mathcal{F}$, el conjunto $f^{-1}(\omega)$ ha de estar en $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ y también deben estar en $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ los conjuntos de la forma

$$\bigcap_{i=1}^{q} f_i^{-1}(\omega_i), \quad \text{donde} \quad f_i \in \mathcal{F} \quad \text{y} \quad \omega_i \in \mathcal{T} \quad \text{para} \quad 1 \leqslant i \leqslant q \tag{1}$$

Se comprueba sin dificultad que las uniones de conjuntos de esta forma son ya una topología en X que es, precisamente, la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.Por tanto, dichos conjuntos forman una base de abiertos de la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.

Una base de entornos de un punto $x \in X$ para dicha topología se obtiene cuando los ω_i son entornos de $f_i(x)$ en Y.

Sea X un conjunto no vacío, $(Y,\mathcal{T})$, un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una familia de aplicaciones de X en Y,la **topología inicial** en X parar la familia $\mathcal{F}$ es la topología más pequeña, es decir, con menos abiertos, para la cual todas las funciones de $\mathcal{F}$ son continuas.Notaremos dicha topología por $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.Para todo abierto $\omega \in \mathcal{T}$ y para toda $f \in \mathcal{F}$, el conjunto $f^{-1}(\omega)$ ha de estar en $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ y también deben estar en $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ los conjuntos de la forma

$$\bigcap_{i=1}^{q} f_i^{-1}(\omega_i), \text{ donde } f_i \in \mathcal{F} \quad \text{y} \quad \omega_i \in \mathcal{T} \text{ para } \quad 1 \leqslant i \leqslant q \tag{1}$$

Se comprueba sin dificultad que las uniones de conjuntos de esta forma son ya una topología en X que es, precisamente, la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.Por tanto, dichos conjuntos forman una base de abiertos de la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.

Una base de entornos de un punto $x \in X$ para dicha topología se obtiene cuando los ω_i son entornos de $f_i(x)$ en Y.

Proposición.

1. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de elementos de X. Se verifica que $\{x_n\} \to x$ en $(X,\mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ si, y sólo si, $\{f(x_n)\} \to f(x)$ para toda $f \in \mathcal{F}$.

Sea X un conjunto no vacío, $(Y,\mathcal{T})$, un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una familia de aplicaciones de X en Y,la **topología inicial** en X parar la familia $\mathcal{F}$ es la topología más pequeña, es decir, con menos abiertos, para la cual todas las funciones de $\mathcal{F}$ son continuas.Notaremos dicha topología por $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.Para todo abierto $\omega \in \mathcal{T}$ y para toda $f \in \mathcal{F}$, el conjunto $f^{-1}(\omega)$ ha de estar en $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ y también deben estar en $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ los conjuntos de la forma

$$\bigcap_{i=1}^{q} f_i^{-1}(\omega_i), \ \text{ donde } \ f_i \in \mathcal{F} \quad \text{y} \quad \omega_i \in \mathcal{T} \ \text{ para } \ 1 \leqslant i \leqslant q \tag{1}$$

Se comprueba sin dificultad que las uniones de conjuntos de esta forma son ya una topología en X que es, precisamente, la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.Por tanto, dichos conjuntos forman una base de abiertos de la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.

Una base de entornos de un punto $x \in X$ para dicha topología se obtiene cuando los ω_i son entornos de $f_i(x)$ en Y.

Proposición.

1. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de elementos de X. Se verifica que $\{x_n\} \to x$ en $(X,\mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ si, y sólo si, $\{f(x_n)\} \to f(x)$ para toda $f \in \mathcal{F}$.
2. Sea Z un espacio topológico y sea $\varphi : Z \to X$. Entonces φ es continua si, y sólo si, $f \circ \varphi : Z \to Y$ es continua para toda $f \in \mathcal{F}$.

Sea X un espacio normado y X^* su dual.

Sea X un espacio normado y X^* su dual.La **topología débil** en X es la topología inicial para la familia de funciones X^*, es decir, es la menor topología en X para la cual todas las formas lineales de X^* son continuas.

Sea X un espacio normado y X^* su dual.La **topología débil** en X es la topología inicial para la familia de funciones X^*, es decir, es la menor topología en X para la cual todas las formas lineales de X^* son continuas.Notaremos dicha topología por $\sigma(X,X^*)$, $\omega(X)$, o, simplemente, por ω, y los conceptos referentes a ella suelen indicarse con la letra w.

Sea X un espacio normado y X^* su dual.La **topología débil** en X es la topología inicial para la familia de funciones X^*, es decir, es la menor topología en X para la cual todas las formas lineales de X^* son continuas.Notaremos dicha topología por $\sigma(X, X^*)$, $\omega(X)$, o, simplemente, por ω, y los conceptos referentes a ella suelen indicarse con la letra w.Los conceptos relativos a la topología de la norma los indicaremos con el símbolo $\|\cdot\|$.

Sea X un espacio normado y X^* su dual.La **topología débil** en X es la topología inicial para la familia de funciones X^*, es decir, es la menor topología en X para la cual todas las formas lineales de X^* son continuas.Notaremos dicha topología por $\sigma(X,X^*)$, $\omega(X)$, o, simplemente, por ω, y los conceptos referentes a ella suelen indicarse con la letra w.Los conceptos relativos a la topología de la norma los indicaremos con el símbolo $\|\cdot\|$.

Una *base de entornos* de $x_0 \in X$ en la topología $\sigma(X,X^*)$ está formada por los conjuntos de la forma

$$\begin{aligned} V(x_0,f_1,f_2,\ldots,f_n,\varepsilon) &= \{x \in X : |f_i(x)-f_i(x_0)| < \varepsilon, 1 \leqslant i \leqslant n\} = \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : |f_i(x-x_0)| < \varepsilon\} = x_0 + \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : |f_i(x)| < \varepsilon\} \\ &= x_0 + V(0,f_1,f_2,\ldots,f_n,\varepsilon) \end{aligned} \tag{2}$$

donde $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $f_1,\ldots,f_n \in X^*$.

Sea X un espacio normado y X^* su dual.La **topología débil** en X es la topología inicial para la familia de funciones X^*, es decir, es la menor topología en X para la cual todas las formas lineales de X^* son continuas.Notaremos dicha topología por $\sigma(X,X^*)$, $\omega(X)$, o, simplemente, por ω, y los conceptos referentes a ella suelen indicarse con la letra w.Los conceptos relativos a la topología de la norma los indicaremos con el símbolo $\|\cdot\|$.

Una *base de entornos* de $x_0 \in X$ en la topología $\sigma(X,X^*)$ está formada por los conjuntos de la forma

$$\begin{aligned} V(x_0,f_1,f_2,\dots,f_n,\varepsilon) &= \{x\in X : |f_i(x)-f_i(x_0)|<\varepsilon, 1\leqslant i\leqslant n\} = \\ &= \bigcap_{i=1}^{n}\{x\in X : |f_i(x-x_0)|<\varepsilon\} = x_0 + \bigcap_{i=1}^{n}\{x\in X : |f_i(x)|<\varepsilon\} \\ &= x_0 + V(0,f_1,f_2,\dots,f_n,\varepsilon) \end{aligned} \tag{2}$$

donde $\varepsilon > 0$, $n\in\mathbb{N}$, $f_1,\dots,f_n\in X^*$.

Teniendo en cuenta que un funcional lineal, $f\in X^\sharp$, es continuo si, y sólo si, su parte real, $\mathrm{Re} f$, es continuo, deducimos que una *subbase de abiertos* para la topología $\sigma(X,X^*)$ está formada por los semiespacios abiertos $\{x\in X : \mathrm{Re} f(x) < \alpha\}$ donde $f\in X^*$ y $\alpha\in\mathbb{R}$.

Sea X un espacio normado y X^* su dual.La **topología débil** en X es la topología inicial para la familia de funciones X^*, es decir, es la menor topología en X para la cual todas las formas lineales de X^* son continuas.Notaremos dicha topología por $\sigma(X,X^*)$, $\omega(X)$, o, simplemente, por ω, y los conceptos referentes a ella suelen indicarse con la letra w.Los conceptos relativos a la topología de la norma los indicaremos con el símbolo $\|\cdot\|$.

Una *base de entornos* de $x_0 \in X$ en la topología $\sigma(X,X^*)$ está formada por los conjuntos de la forma

$$\begin{aligned} V(x_0,f_1,f_2,\dots,f_n,\varepsilon) &= \{x\in X : |f_i(x)-f_i(x_0)|<\varepsilon, 1\leqslant i\leqslant n\} = \\ &= \bigcap_{i=1}^{n}\{x\in X : |f_i(x-x_0)|<\varepsilon\} = x_0+\bigcap_{i=1}^{n}\{x\in X : |f_i(x)|<\varepsilon\} \\ &= x_0+V(0,f_1,f_2,\dots,f_n,\varepsilon) \end{aligned} \tag{2}$$

donde $\varepsilon>0$, $n\in\mathbb{N}$, $f_1,\dots,f_n\in X^*$.

Teniendo en cuenta que un funcional lineal, $f\in X^\sharp$, es continuo si, y sólo si, su parte real, $\mathrm{Re} f$, es continuo, deducimos que una *subbase de abiertos* para la topología $\sigma(X,X^*)$ está formada por los semiespacios abiertos $\{x\in X : \mathrm{Re} f(x)<\alpha\}$ donde $f\in X^*$ y $\alpha\in\mathbb{R}$.

Observa que la igualdad (2) dice que los w-entornos básicos de un punto se obtienen trasladando a ese punto los w-entornos básicos del origen.

Sea X un espacio normado y X^* su dual.La **topología débil** en X es la topología inicial para la familia de funciones X^*, es decir, es la menor topología en X para la cual todas las formas lineales de X^* son continuas.Notaremos dicha topología por $\sigma(X,X^*)$, $\omega(X)$, o, simplemente, por ω, y los conceptos referentes a ella suelen indicarse con la letra w.Los conceptos relativos a la topología de la norma los indicaremos con el símbolo $\|\cdot\|$.

Una *base de entornos* de $x_0 \in X$ en la topología $\sigma(X,X^*)$ está formada por los conjuntos de la forma

$$\begin{aligned} V(x_0,f_1,f_2,\ldots,f_n,\varepsilon) &= \{x\in X : |f_i(x)-f_i(x_0)| < \varepsilon, 1\leqslant i\leqslant n\} = \\ &= \bigcap_{i=1}^{n}\{x\in X : |f_i(x-x_0)|<\varepsilon\} = x_0 + \bigcap_{i=1}^{n}\{x\in X : |f_i(x)|<\varepsilon\} \\ &= x_0 + V(0,f_1,f_2,\ldots,f_n,\varepsilon) \end{aligned} \tag{2}$$

donde $\varepsilon > 0$, $n\in\mathbb{N}$, $f_1,\ldots,f_n\in X^*$.

Teniendo en cuenta que un funcional lineal, $f\in X^\sharp$, es continuo si, y sólo si, su parte real, $\mathrm{Re} f$, es continuo, deducimos que una *subbase de abiertos* para la topología $\sigma(X,X^*)$ está formada por los semiespacios abiertos $\{x\in X : \mathrm{Re} f(x) < \alpha\}$ donde $f\in X^*$ y $\alpha\in\mathbb{R}$.

Observa que la igualdad (2) dice que los w-entornos básicos de un punto se obtienen trasladando a ese punto los w-entornos básicos del origen.Notaremos $\overline{A}^w$ el cierre en la topología débil de un conjunto $A\subset X$.

Observa que, si representamos por $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ la topología de la norma en X, puesto que las $f \in X^*$ son continuas para dicha topología, se tiene que $\sigma(X,X^*) \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$. De hecho, si $f : X \to \mathbb{K}$ es una forma lineal, entonces f es w-continua si, y sólo si, $f \in X^*$.

Observa que, si representamos por $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ la topología de la norma en X, puesto que las $f \in X^*$ son continuas para dicha topología, se tiene que $\sigma(X,X^*) \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$. De hecho, si $f : X \to \mathbb{K}$ es una forma lineal, entonces f es w-continua si, y sólo si, $f \in X^*$.

Proposición.

1. La topología débil es de Hausdorff y las aplicaciones suma y producto por escalares son w-continuas, es decir, $(X,\sigma(X,X^*))$ es un **espacio vectorial topológico**. En consecuencia, las traslaciones, $x \mapsto a + x$, y las homotecias, $x \mapsto \lambda x$, $(\lambda \neq 0)$ son homeomorfismos de (X,ω).

Observa que, si representamos por $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ la topología de la norma en X, puesto que las $f \in X^*$ son continuas para dicha topología, se tiene que $\sigma(X,X^*) \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$. De hecho, si $f : X \to \mathbb{K}$ es una forma lineal, entonces f es w-continua si, y sólo si, $f \in X^*$.

Proposición.

1. La topología débil es de Hausdorff y las aplicaciones suma y producto por escalares son w-continuas, es decir, $(X,\sigma(X,X^*))$ es un **espacio vectorial topológico**. En consecuencia, las traslaciones, $x \mapsto a+x$, y las homotecias, $x \mapsto \lambda x$, $(\lambda \neq 0)$ son homeomorfismos de (X,ω).
2. El cierre débil de un subespacio o de un convexo es también un subespacio o un convexo.

Observa que, si representamos por $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ la topología de la norma en X, puesto que las $f \in X^*$ son continuas para dicha topología, se tiene que $\sigma(X,X^*) \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$. De hecho, si $f : X \to \mathbb{K}$ es una forma lineal, entonces f es w-continua si, y sólo si, $f \in X^*$.

Proposición.

1. La topología débil es de Hausdorff y las aplicaciones suma y producto por escalares son w-continuas, es decir, $(X,\sigma(X,X^*))$ es un **espacio vectorial topológico**. En consecuencia, las traslaciones, $x \mapsto a+x$, y las homotecias, $x \mapsto \lambda x$, $(\lambda \neq 0)$ son homeomorfismos de (X,ω).
2. El cierre débil de un subespacio o de un convexo es también un subespacio o un convexo.

Observa que, si representamos por $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ la topología de la norma en X, puesto que las $f \in X^*$ son continuas para dicha topología, se tiene que $\sigma(X,X^*) \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$. De hecho, si $f : X \to \mathbb{K}$ es una forma lineal, entonces f es w-continua si, y sólo si, $f \in X^*$.

Proposición.

1. La topología débil es de Hausdorff y las aplicaciones suma y producto por escalares son w-continuas, es decir, $(X,\sigma(X,X^*))$ es un **espacio vectorial topológico**. En consecuencia, las traslaciones, $x \mapsto a+x$, y las homotecias, $x \mapsto \lambda x$, $(\lambda \neq 0)$ son homeomorfismos de (X,ω).
2. El cierre débil de un subespacio o de un convexo es también un subespacio o un convexo.

Proposición. Supongamos que f y $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son funcionales lineales sobre un espacio vectorial X. Entonces son equivalentes:

Observa que, si representamos por $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ la topología de la norma en X, puesto que las $f \in X^*$ son continuas para dicha topología, se tiene que $\sigma(X,X^*) \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$. De hecho, si $f : X \to \mathbb{K}$ es una forma lineal, entonces f es w-continua si, y sólo si, $f \in X^*$.

Proposición.

1. La topología débil es de Hausdorff y las aplicaciones suma y producto por escalares son w-continuas, es decir, $(X,\sigma(X,X^*))$ es un **espacio vectorial topológico**. En consecuencia, las traslaciones, $x \mapsto a+x$, y las homotecias, $x \mapsto \lambda x$, ($\lambda \neq 0$) son homeomorfismos de (X,ω).
2. El cierre débil de un subespacio o de un convexo es también un subespacio o un convexo.

Proposición. Supongamos que f y $f_1,f_2,\dots,f_n$ son funcionales lineales sobre un espacio vectorial X. Entonces son equivalentes:

1. $f \in \mathrm{Lin}(\{f_1,f_2,\dots,f_n\})$.

Observa que, si representamos por $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ la topología de la norma en X, puesto que las $f \in X^*$ son continuas para dicha topología, se tiene que $\sigma(X,X^*) \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$. De hecho, si $f : X \to \mathbb{K}$ es una forma lineal, entonces f es w-continua si, y sólo si, $f \in X^*$.

Proposición.

1. La topología débil es de Hausdorff y las aplicaciones suma y producto por escalares son w-continuas, es decir, $(X,\sigma(X,X^*))$ es un **espacio vectorial topológico**. En consecuencia, las traslaciones, $x \mapsto a+x$, y las homotecias, $x \mapsto \lambda x$, $(\lambda \neq 0)$ son homeomorfismos de (X,ω).
2. El cierre débil de un subespacio o de un convexo es también un subespacio o un convexo.

Proposición. Supongamos que f y $f_1, f_2, \dots, f_n$ son funcionales lineales sobre un espacio vectorial X. Entonces son equivalentes:

1. $f \in \operatorname{Lin}(\{f_1, f_2, \dots, f_n\})$.
2. Existe $C \geqslant 0$ tal que $|f(x)| \leqslant C \max\{|f_i(x)| : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ para todo $x \in X$.

Observa que, si representamos por $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ la topología de la norma en X, puesto que las $f \in X^*$ son continuas para dicha topología, se tiene que $\sigma(X,X^*) \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$. De hecho, si $f : X \to \mathbb{K}$ es una forma lineal, entonces f es w-continua si, y sólo si, $f \in X^*$.

Proposición.

1. La topología débil es de Hausdorff y las aplicaciones suma y producto por escalares son w-continuas, es decir, $(X,\sigma(X,X^*))$ es un **espacio vectorial topológico**. En consecuencia, las traslaciones, $x \mapsto a+x$, y las homotecias, $x \mapsto \lambda x$, $(\lambda \neq 0)$ son homeomorfismos de (X,ω).
2. El cierre débil de un subespacio o de un convexo es también un subespacio o un convexo.

Proposición. Supongamos que f y $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son funcionales lineales sobre un espacio vectorial X. Entonces son equivalentes:

1. $f \in \operatorname{Lin}(\{f_1, f_2, \ldots, f_n\})$.
2. Existe $C \geqslant 0$ tal que $|f(x)| \leqslant C \max\{|f_i(x)| : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ para todo $x \in X$.
3. f está acotado, o mayorado, o minorado en $\cap_{i=1}^{n} \ker f_i$.

Observa que, si representamos por $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ la topología de la norma en X, puesto que las $f \in X^*$ son continuas para dicha topología, se tiene que $\sigma(X,X^*) \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$. De hecho, si $f : X \to \mathbb{K}$ es una forma lineal, entonces f es w-continua si, y sólo si, $f \in X^*$.

Proposición.

1. La topología débil es de Hausdorff y las aplicaciones suma y producto por escalares son w-continuas, es decir, $(X,\sigma(X,X^*))$ es un **espacio vectorial topológico**. En consecuencia, las traslaciones, $x \mapsto a+x$, y las homotecias, $x \mapsto \lambda x$, $(\lambda \neq 0)$ son homeomorfismos de (X,ω).
2. El cierre débil de un subespacio o de un convexo es también un subespacio o un convexo.

Proposición. Supongamos que f y $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son funcionales lineales sobre un espacio vectorial X. Entonces son equivalentes:

1. $f \in \operatorname{Lin}(\{f_1, f_2, \ldots, f_n\})$.
2. Existe $C \geqslant 0$ tal que $|f(x)| \leqslant C \max\{|f_i(x)| : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ para todo $x \in X$.
3. f está acotado, o mayorado, o minorado en $\cap_{i=1}^n \ker f_i$.
4. $\cap_{i=1}^n \ker f_i \subset \ker f$.

Una consecuencia importante de la proposición anterior es que si $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ son formas lineales sobre un espacio vectorial X y $\cap_{k=1}^{n} \ker f_k = \{0\}$, entonces para toda forma lineal $f \in X^\sharp$ se cumple que $\cap_{i=1}^{n} \ker f_i \subset \ker f$ y, por tanto, $f \in \mathrm{Lin}(\{f_1, f_2, \ldots, f_n\})$, es decir, $X^\sharp$ es de dimensión finita y, en consecuencia, X también es de dimensión finita.

Una consecuencia importante de la proposición anterior es que si $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ son formas lineales sobre un espacio vectorial X y $\cap_{k=1}^{n} \ker f_k = \{0\}$, entonces para toda forma lineal $f \in X^\sharp$ se cumple que $\cap_{i=1}^{n} \ker f_i \subset \ker f$ y, por tanto, $f \in \mathrm{Lin}(\{f_1, f_2, \dots, f_n\})$, es decir, $X^\sharp$ es de dimensión finita y, en consecuencia, X también es de dimensión finita.Por tanto, si la dimensión de X es infinita, se verifica que $\cap_{k=1}^{n} \ker f_k$ es un subespacio vectorial no nulo.

Una consecuencia importante de la proposición anterior es que si $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ son formas lineales sobre un espacio vectorial X y $\cap_{k=1}^{n} \ker f_k = \{0\}$, entonces para toda forma lineal $f \in X^\sharp$ se cumple que $\cap_{i=1}^{n} \ker f_i \subset \ker f$ y, por tanto, $f \in \mathrm{Lin}(\{f_1, f_2, \ldots, f_n\})$, es decir, $X^\sharp$ es de dimensión finita y, en consecuencia, X también es de dimensión finita.Por tanto, si la dimensión de X es infinita, se verifica que $\cap_{k=1}^{n} \ker f_k$ es un subespacio vectorial no nulo.

Si ahora X es un espacio normado de dimensión infinita, todo w-entorno del origen es de la forma $\bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : |f_i(x)| < \varepsilon\}$ y por tanto contiene un subespacio vectorial no nulo $\cap_{i=1}^{n} \ker f_i$.

Una consecuencia importante de la proposición anterior es que si $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ son formas lineales sobre un espacio vectorial X y $\cap_{k=1}^{n} \ker f_k = \{0\}$, entonces para toda forma lineal $f \in X^{\sharp}$ se cumple que $\cap_{i=1}^{n} \ker f_i \subset \ker f$ y, por tanto, $f \in \mathrm{Lin}(\{f_1, f_2, \dots, f_n\})$, es decir, $X^{\sharp}$ es de dimensión finita y, en consecuencia, X también es de dimensión finita.Por tanto, si la dimensión de X es infinita, se verifica que $\cap_{k=1}^{n} \ker f_k$ es un subespacio vectorial no nulo.

Si ahora X es un espacio normado de dimensión infinita, todo w-entorno del origen es de la forma $\bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : |f_i(x)| < \varepsilon\}$ y por tanto contiene un subespacio vectorial no nulo $\cap_{i=1}^{n} \ker f_i$.Por tanto, **los entornos débiles del origen en un espacio normado de dimensión infinita no están acotados en norma**; en consecuencia, cuando la dimensión de X es infinita, la bola unidad de X no es un entorno débil de cero y, por tanto, la topología débil está estrictamente contenida en la topología de la norma.

Una consecuencia importante de la proposición anterior es que si $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ son formas lineales sobre un espacio vectorial X y $\cap_{k=1}^n \ker f_k = \{0\}$, entonces para toda forma lineal $f \in X^\sharp$ se cumple que $\cap_{i=1}^n \ker f_i \subset \ker f$ y, por tanto, $f \in \mathrm{Lin}(\{f_1, f_2, \ldots, f_n\})$, es decir, $X^\sharp$ es de dimensión finita y, en consecuencia, X también es de dimensión finita.Por tanto, si la dimensión de X es infinita, se verifica que $\cap_{k=1}^n \ker f_k$ es un subespacio vectorial no nulo.

Si ahora X es un espacio normado de dimensión infinita, todo w-entorno del origen es de la forma $\bigcap_{i=1}^n \{x \in X : |f_i(x)| < \varepsilon\}$ y por tanto contiene un subespacio vectorial no nulo $\cap_{i=1}^n \ker f_i$.Por tanto, **los entornos débiles del origen en un espacio normado de dimensión infinita no están acotados en norma**; en consecuencia, cuando la dimensión de X es infinita, la bola unidad de X no es un entorno débil de cero y, por tanto, la topología débil está estrictamente contenida en la topología de la norma.A su vez, los entornos débiles de cada punto, como se pone de manifiesto en la igualdad (2), son trasladados de entornos débiles del origen, por lo que, cuando la dimensión de X es infinita, *todo entorno débil de un punto contiene una variedad lineal afín que no se reduce a un punto*, es decir, contiene, al menos una recta afín, por lo que dichos entornos débiles no están acotados en norma.

Proposición. La topología débil coincide con la topología de la norma si, y sólo si, la dimensión es finita.

Proposición. La topología débil coincide con la topología de la norma si, y sólo si, la dimensión es finita.

Proposición. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de un espacio normado X y $x \in X$. Se verifica que:

Proposición. La topología débil coincide con la topología de la norma si, y sólo si, la dimensión es finita.

Proposición. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de un espacio normado X y $x \in X$. Se verifica que:

1. $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$ si, y sólo si, $\{f(x_n)\} \longrightarrow f(x)$ para todo $f \in X^*$.

Proposición. La topología débil coincide con la topología de la norma si, y sólo si, la dimensión es finita.

Proposición. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de un espacio normado X y $x \in X$. Se verifica que:

1. $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$ si, y sólo si, $\{f(x_n)\} \longrightarrow f(x)$ para todo $f \in X^*$.
2. $\{x_n\} \xrightarrow{\|\ \|} x \Longrightarrow \{x_n\} \xrightarrow{w} x$.

Proposición. La topología débil coincide con la topología de la norma si, y sólo si, la dimensión es finita.

Proposición. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de un espacio normado X y $x \in X$. Se verifica que:

1. $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$ si, y sólo si, $\{f(x_n)\} \longrightarrow f(x)$ para todo $f \in X^*$.
2. $\{x_n\} \xrightarrow{\|\ \|} x \Longrightarrow \{x_n\} \xrightarrow{w} x$.
3. Si $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$, entonces $\{x_n\}$ está acotada y $\|x\| \leqslant \liminf \{\|x_n\|\}$.

Proposición. La topología débil coincide con la topología de la norma si, y sólo si, la dimensión es finita.

Proposición. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de un espacio normado X y $x \in X$. Se verifica que:

1. $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$ si, y sólo si, $\{f(x_n)\} \longrightarrow f(x)$ para todo $f \in X^*$.
2. $\{x_n\} \xrightarrow{\|\ \|} x \Longrightarrow \{x_n\} \xrightarrow{w} x$.
3. Si $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$, entonces $\{x_n\}$ está acotada y $\|x\| \leqslant \liminf \{\|x_n\|\}$.
4. Si $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$ y $\{f_n\} \xrightarrow{\|\ \|} f$ en X^*, entonces $\{f_n(x_n)\} \to f(x)$.

Proposición. La topología débil coincide con la topología de la norma si, y sólo si, la dimensión es finita.

Proposición. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de un espacio normado X y $x \in X$. Se verifica que:

1. $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$ si, y sólo si, $\{f(x_n)\} \longrightarrow f(x)$ para todo $f \in X^*$.
2. $\{x_n\} \xrightarrow{\|\ \|} x \Longrightarrow \{x_n\} \xrightarrow{w} x$.
3. Si $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$, entonces $\{x_n\}$ está acotada y $\|x\| \leqslant \liminf \{\|x_n\|\}$.
4. Si $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$ y $\{f_n\} \xrightarrow{\|\ \|} f$ en X^*, entonces $\{f_n(x_n)\} \to f(x)$.

Proposición. La topología débil coincide con la topología de la norma si, y sólo si, la dimensión es finita.

Proposición. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de un espacio normado X y $x \in X$. Se verifica que:

1. $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$ si, y sólo si, $\{f(x_n)\} \longrightarrow f(x)$ para todo $f \in X^*$.
2. $\{x_n\} \xrightarrow{\|\ \|} x \Longrightarrow \{x_n\} \xrightarrow{w} x$.
3. Si $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$, entonces $\{x_n\}$ está acotada y $\|x\| \leqslant \liminf \{\|x_n\|\}$.
4. Si $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$ y $\{f_n\} \xrightarrow{\|\ \|} f$ en X^*, entonces $\{f_n(x_n)\} \to f(x)$.

Corolario. En un espacio normado de dimensión infinita la topología débil no es metrizable.

Proposición. La topología débil coincide con la topología de la norma si, y sólo si, la dimensión es finita.

Proposición. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de un espacio normado X y $x \in X$. Se verifica que:

1. $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$ si, y sólo si, $\{f(x_n)\} \longrightarrow f(x)$ para todo $f \in X^*$.
2. $\{x_n\} \xrightarrow{\|\ \|} x \Longrightarrow \{x_n\} \xrightarrow{w} x$.
3. Si $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$, entonces $\{x_n\}$ está acotada y $\|x\| \leqslant \liminf \{\|x_n\|\}$.
4. Si $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$ y $\{f_n\} \xrightarrow{\|\ \|} f$ en X^*, entonces $\{f_n(x_n)\} \to f(x)$.

Corolario. En un espacio normado de dimensión infinita la topología débil no es metrizable.

Proposición. Sea X un espacio normado de dimensión infinita. Entonces se verifica que:

$$\overline{S_X}^w = B_X$$

En consecuencia, la aplicación $x \mapsto \|x\|$ es w-inferiormente semicontinua pero no es w- continua.

Teorema de Mazur. Sea X un espacio normado y C un subconjunto convexo de X. Entonces C es $\| \ \|$-cerrado si, y sólo si, es w-cerrado. En consecuencia, para conjuntos convexos, el cierre en norma y el cierre débil coinciden.

Teorema de Mazur. Sea X un espacio normado y C un subconjunto convexo de X. Entonces C es $\| \, \|$-cerrado si, y sólo si, es w-cerrado. En consecuencia, para conjuntos convexos, el cierre en norma y el cierre débil coinciden.

Proposición. Sea X un espacio normado y $F \subset X^*$ tal que $X^* = \overline{\mathtt{Lin}}(F)$. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de X que está acotada en norma y $x \in X$ tal que $\lim \{g(x_n)\} = g(x)$ para todo $g \in F$. Entonces $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$.

Teorema de Mazur. Sea X un espacio normado y C un subconjunto convexo de X. Entonces C es $\| \ \|$-cerrado si, y sólo si, es w-cerrado. En consecuencia, para conjuntos convexos, el cierre en norma y el cierre débil coinciden.

Proposición. Sea X un espacio normado y $F \subset X^*$ tal que $X^* = \overline{\mathrm{Lin}}(F)$. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de X que está acotada en norma y $x \in X$ tal que $\lim \{g(x_n)\} = g(x)$ para todo $g \in F$. Entonces $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$.

Corolario.

1. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en c_0 y supongamos que existe $x \in c_0$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(k) = x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $\{x_n\} \xrightarrow{\sigma(c_0,\ell_1)} x$.

Teorema de Mazur. Sea X un espacio normado y C un subconjunto convexo de X. Entonces C es $\| \ \|$-cerrado si, y sólo si, es w-cerrado. En consecuencia, para conjuntos convexos, el cierre en norma y el cierre débil coinciden.

Proposición. Sea X un espacio normado y $F \subset X^*$ tal que $X^* = \overline{\text{Lin}}(F)$. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de X que está acotada en norma y $x \in X$ tal que $\text{lím}\,\{g(x_n)\} = g(x)$ para todo $g \in F$. Entonces $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$.

Corolario.

1. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en c_0 y supongamos que existe $x \in c_0$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(k) = x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $\{x_n\} \xrightarrow{\sigma(c_0,\ell_1)} x$.
2. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en ℓ_p ($p > 1$) y supongamos que existe $x \in \ell_p$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(k) = x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $\{x_n\} \xrightarrow{\sigma(\ell_p,\ell_q)} x$.

Corolario. Sea $1 < p < \infty$ y Ω un abierto en $\mathbb{R}^N$. Entonces una sucesión $\{f_n\}$ de funciones de $L_p(\Omega)$ converge débilmente a una función $f \in L_p(\Omega)$ si, y sólo si, está acotada y cumple alguna de las dos condiciones equivalentes:

Corolario. Sea $1 < p < \infty$ y Ω un abierto en $\mathbb{R}^N$. Entonces una sucesión $\{f_n\}$ de funciones de $L_p(\Omega)$ converge débilmente a una función $f \in L_p(\Omega)$ si, y sólo si, está acotada y cumple alguna de las dos condiciones equivalentes:

a) Para todo intervalo acotado $I \subset \Omega$, se verifica que
$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Corolario. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $\{u_i : i \in I\}$ una base ortonormal, entonces $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$ si, y sólo si, $\{x_n\}$ está acotada y $\{(x_n \mid u_i)\} \to (x \mid u_i)$ para todo $i \in I$.

Corolario. Sea $1 < p < \infty$ y Ω un abierto en $\mathbb{R}^N$. Entonces una sucesión $\{f_n\}$ de funciones de $L_p(\Omega)$ converge débilmente a una función $f \in L_p(\Omega)$ si, y sólo si, está acotada y cumple alguna de las dos condiciones equivalentes:

a) Para todo intervalo acotado $I \subset \Omega$, se verifica que
$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

b) Para toda $g \in C_{00}(\Omega)$ se verifica que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\,.$

Corolario. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $\{u_i : i \in I\}$ una base ortonormal, entonces $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$ si, y sólo si, $\{x_n\}$ está acotada y $\{(x_n \mid u_i)\} \to (x \mid u_i)$ para todo $i \in I$.

Corolario. Sea $1 < p < \infty$ y Ω un abierto en $\mathbb{R}^N$. Entonces una sucesión $\{f_n\}$ de funciones de $L_p(\Omega)$ converge débilmente a una función $f \in L_p(\Omega)$ si, y sólo si, está acotada y cumple alguna de las dos condiciones equivalentes:

a) Para todo intervalo acotado $I \subset \Omega$, se verifica que
$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

b) Para toda $g \in C_{00}(\Omega)$ se verifica que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\,.$

Corolario. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $\{u_i : i \in I\}$ una base ortonormal, entonces $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$ si, y sólo si, $\{x_n\}$ está acotada y $\{(x_n \mid u_i)\} \to (x \mid u_i)$ para todo $i \in I$.

Corolario. Sea $1 < p < \infty$ y Ω un abierto en $\mathbb{R}^N$. Entonces una sucesión $\{f_n\}$ de funciones de $L_p(\Omega)$ converge débilmente a una función $f \in L_p(\Omega)$ si, y sólo si, está acotada y cumple alguna de las dos condiciones equivalentes:

a) Para todo intervalo acotado $I \subset \Omega$, se verifica que $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Para toda $g \in C_{00}(\Omega)$ se verifica que $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

Corolario. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $\{u_i : i \in I\}$ una base ortonormal, entonces $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$ si, y sólo si, $\{x_n\}$ está acotada y $\{(x_n \mid u_i)\} \to (x \mid u_i)$ para todo $i \in I$.

Sea X un espacio normado y X^* su dual. Como todo espacio normado, el espacio X^* tiene su topología débil, $\sigma(X^*, X^{**})$, que es la topología inicial en X^* para las formas lineales de su dual X^{**}.

Corolario. Sea $1 < p < \infty$ y Ω un abierto en $\mathbb{R}^N$. Entonces una sucesión $\{f_n\}$ de funciones de $L_p(\Omega)$ converge débilmente a una función $f \in L_p(\Omega)$ si, y sólo si, está acotada y cumple alguna de las dos condiciones equivalentes:

a) Para todo intervalo acotado $I \subset \Omega$, se verifica que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Para toda $g \in C_{00}(\Omega)$ se verifica que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

Corolario. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $\{u_i : i \in I\}$ una base ortonormal, entonces $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$ si, y sólo si, $\{x_n\}$ está acotada y $\{(x_n \mid u_i)\} \to (x \mid u_i)$ para todo $i \in I$.

Sea X un espacio normado y X^* su dual. Como todo espacio normado, el espacio X^* tiene su topología débil, $\sigma(X^*, X^{**})$, que es la topología inicial en X^* para las formas lineales de su dual X^{**}.Vamos a considerar ahora en X^* una topología más pequeña que es la topología inicial en X^* para las formas lineales del subespacio $J_X(X) \subset X^{**}$, es decir, es la más pequeña topología en X^* para la cual las aplicaciones de evaluación, $x^* \mapsto x^*(x)$ $(x^* \in X^*)$, es decir las formas lineales que los elementos de X definen en X^*, son continuas;

Corolario. Sea $1 < p < \infty$ y Ω un abierto en $\mathbb{R}^N$. Entonces una sucesión $\{f_n\}$ de funciones de $L_p(\Omega)$ converge débilmente a una función $f \in L_p(\Omega)$ si, y sólo si, está acotada y cumple alguna de las dos condiciones equivalentes:

a) Para todo intervalo acotado $I \subset \Omega$, se verifica que $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Para toda $g \in C_{00}(\Omega)$ se verifica que $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

Corolario. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $\{u_i : i \in I\}$ una base ortonormal, entonces $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$ si, y sólo si, $\{x_n\}$ está acotada y $\{(x_n \mid u_i)\} \to (x \mid u_i)$ para todo $i \in I$.

Sea X un espacio normado y X^* su dual. Como todo espacio normado, el espacio X^* tiene su topología débil, $\sigma(X^*, X^{**})$, que es la topología inicial en X^* para las formas lineales de su dual X^{**}.Vamos a considerar ahora en X^* una topología más pequeña que es la topología inicial en X^* para las formas lineales del subespacio $J_X(X) \subset X^{**}$, es decir, es la más pequeña topología en X^* para la cual las aplicaciones de evaluación, $x^* \mapsto x^*(x)$ ($x^* \in X^*$), es decir las formas lineales que los elementos de X definen en X^*, son continuas;dicha topología se llama **topología débil-*** de X^* y se representa por $\sigma(X^*, X)$ o ω^*, y los conceptos referentes a ella suelen indicarse con la letra w^*.

Una *base de entornos* de $x_0^* \in X^*$ en la topología $\sigma(X^*, X)$ está formada por los conjuntos de la forma

$$
\begin{aligned}
V(x_0^*, x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon) &= \{x^* \in X^* : |x^*(x_i) - x_0^*(x_i)| < \varepsilon, 1 \leqslant i \leqslant n\} = \qquad (3)\\
&= \bigcap_{i=1}^{n} \{x^* \in X^* : |(x^* - x_0^*)(x_i)| < \varepsilon\} = \\
&= x_0^* + \bigcap_{i=1}^{n} \{x^* \in X^* : |x^*(x_i)| < \varepsilon\}
\end{aligned}
$$

donde $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$.

Una *base de entornos* de $x_0^* \in X^*$ en la topología $\sigma(X^*, X)$ está formada por los conjuntos de la forma

$$\begin{aligned} V(x_0^*, x_1, x_2, \dots, x_n, \varepsilon) &= \{x^* \in X^* : |x^*(x_i) - x_0^*(x_i)| < \varepsilon, 1 \leqslant i \leqslant n\} = \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} \{x^* \in X^* : |(x^* - x_0^*)(x_i)| < \varepsilon\} = \\ &= x_0^* + \bigcap_{i=1}^{n} \{x^* \in X^* : |x^*(x_i)| < \varepsilon\} \end{aligned} \tag{3}$$

donde $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in X$.

Una *subbase de abiertos* para la topología $\sigma(X^*, X)$ está formada por los semiespacios abiertos $\{x^* \in X^* : \mathrm{Re}\, x^*(x) < \alpha\}$ donde $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Una *base de entornos* de $x_0^* \in X^*$ en la topología $\sigma(X^*, X)$ está formada por los conjuntos de la forma

$$\begin{aligned} V(x_0^*, x_1, x_2, \dots, x_n, \varepsilon) &= \{x^* \in X^* : |x^*(x_i) - x_0^*(x_i)| < \varepsilon, 1 \leqslant i \leqslant n\} = \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} \{x^* \in X^* : |(x^* - x_0^*)(x_i)| < \varepsilon\} = \\ &= x_0^* + \bigcap_{i=1}^{n} \{x^* \in X^* : |x^*(x_i)| < \varepsilon\} \end{aligned} \tag{3}$$

donde $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in X$.

Una *subbase de abiertos* para la topología $\sigma(X^*, X)$ está formada por los semiespacios abiertos $\{x^* \in X^* : \mathrm{Re}\, x^*(x) < \alpha\}$ donde $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposición. Sea $(Z, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Una aplicación $\psi : (Z, \mathcal{T}) \to (X^*, \omega^*)$ es continua si, y sólo si, para todo $x \in X$ la aplicación $J(x) \circ \psi : (Z, \mathcal{T}) \to \mathbb{K}$ dada por

$$[J(x) \circ \psi](z) = [\psi(z)](x) \qquad \forall z \in Z$$

es continua.

Proposición.

1. La topología débil-* es de Hausdorff y las aplicaciones suma y producto por escalares son w^*-continuas, es decir, $(X^*, \sigma(X^*, X))$ es un **espacio vectorial topológico**. En consecuencia, las traslaciones, $x^* \mapsto a^* + x^*$, y las homotecias, $x^* \mapsto \lambda x^*$, $(\lambda \neq 0)$ son homeomorfismos de (X^*, ω^*).

Proposición.

1. La topología débil-* es de Hausdorff y las aplicaciones suma y producto por escalares son w^*-continuas, es decir, $(X^*, \sigma(X^*, X))$ es un **espacio vectorial topológico**. En consecuencia, las traslaciones, $x^* \mapsto a^* + x^*$, y las homotecias, $x^* \mapsto \lambda x^*$, $(\lambda \neq 0)$ son homeomorfismos de (X^*, ω^*).
2. El cierre débil-* de un subespacio o de un convexo es también un subespacio o un convexo.

Proposición.

1. La topología débil-* es de Hausdorff y las aplicaciones suma y producto por escalares son w^*-continuas, es decir, $(X^*, \sigma(X^*, X))$ es un **espacio vectorial topológico**. En consecuencia, las traslaciones, $x^* \mapsto a^* + x^*$, y las homotecias, $x^* \mapsto \lambda x^*$, $(\lambda \neq 0)$ son homeomorfismos de (X^*, ω^*).
2. El cierre débil-* de un subespacio o de un convexo es también un subespacio o un convexo.

Proposición.

1. La topología débil-* es de Hausdorff y las aplicaciones suma y producto por escalares son w^*-continuas, es decir, $(X^*, \sigma(X^*, X))$ es un **espacio vectorial topológico**. En consecuencia, las traslaciones, $x^* \mapsto a^* + x^*$, y las homotecias, $x^* \mapsto \lambda x^*$, $(\lambda \neq 0)$ son homeomorfismos de (X^*, ω^*).
2. El cierre débil-* de un subespacio o de un convexo es también un subespacio o un convexo.

En dimensión infinita, todo w^*-abierto contiene un subespacio afín no reducido a un punto y, por tanto, no está acotado en norma. En consecuencia, en dimensión infinita, las bolas abiertas no son abiertos para la topología débil-*.

Proposición.

1. La topología débil-* es de Hausdorff y las aplicaciones suma y producto por escalares son w^*-continuas, es decir, $(X^*, \sigma(X^*, X))$ es un **espacio vectorial topológico**. En consecuencia, las traslaciones, $x^* \mapsto a^* + x^*$, y las homotecias, $x^* \mapsto \lambda x^*$, $(\lambda \neq 0)$ son homeomorfismos de (X^*, ω^*).
2. El cierre débil-* de un subespacio o de un convexo es también un subespacio o un convexo.

En dimensión infinita, todo w^*-abierto contiene un subespacio afín no reducido a un punto y, por tanto, no está acotado en norma. En consecuencia, en dimensión infinita, las bolas abiertas no son abiertos para la topología débil-*.

Así, en todo espacio normado dual tenemos tres topologías: la de la norma, $\mathcal{T}_{\| \|}$, la débil $\sigma(X^*, X^{**})$ y la débil-* $\sigma(X^*, X)$, cada una de ellas contenida en la anterior.

Proposición.

1. La topología débil-* es de Hausdorff y las aplicaciones suma y producto por escalares son w^*-continuas, es decir, $(X^*, \sigma(X^*, X))$ es un **espacio vectorial topológico**. En consecuencia, las traslaciones, $x^* \mapsto a^* + x^*$, y las homotecias, $x^* \mapsto \lambda x^*$, $(\lambda \neq 0)$ son homeomorfismos de (X^*, ω^*).
2. El cierre débil-* de un subespacio o de un convexo es también un subespacio o un convexo.

En dimensión infinita, todo w^*-abierto contiene un subespacio afín no reducido a un punto y, por tanto, no está acotado en norma. En consecuencia, en dimensión infinita, las bolas abiertas no son abiertos para la topología débil-*.

Así, en todo espacio normado dual tenemos tres topologías: la de la norma, $\mathcal{T}_{\| \|}$, la débil $\sigma(X^*, X^{**})$ y la débil-* $\sigma(X^*, X)$, cada una de ellas contenida en la anterior.

Proposición. Sea X un espacio normado. Los únicos funcionales lineales $f : X^* \to \mathbb{K}$ w^*-continuos son los de la forma $J_X(x)$ con $x \in X$, es decir, los funcionales de evaluación sobre X^*. En consecuencia, las topologías $\sigma(X^*, X)$ y $\sigma(X^*, X^{**})$ coinciden si, y sólo si, X es reflexivo.

Proposición.

1. La topología débil-* es de Hausdorff y las aplicaciones suma y producto por escalares son w^*-continuas, es decir, $(X^*, \sigma(X^*, X))$ es un **espacio vectorial topológico**. En consecuencia, las traslaciones, $x^* \mapsto a^* + x^*$, y las homotecias, $x^* \mapsto \lambda x^*$, ($\lambda \neq 0$) son homeomorfismos de (X^*, ω^*).
2. El cierre débil-* de un subespacio o de un convexo es también un subespacio o un convexo.

En dimensión infinita, todo w^*-abierto contiene un subespacio afín no reducido a un punto y, por tanto, no está acotado en norma. En consecuencia, en dimensión infinita, las bolas abiertas no son abiertos para la topología débil-*.

Así, en todo espacio normado dual tenemos tres topologías: la de la norma, $\mathcal{T}_{\| \|}$, la débil $\sigma(X^*, X^{**})$ y la débil-* $\sigma(X^*, X)$, cada una de ellas contenida en la anterior.

Proposición. Sea X un espacio normado. Los únicos funcionales lineales $f : X^* \to \mathbb{K}$ w^*-continuos son los de la forma $J_X(x)$ con $x \in X$, es decir, los funcionales de evaluación sobre X^*. En consecuencia, las topologías $\sigma(X^*, X)$ y $\sigma(X^*, X^{**})$ coinciden si, y sólo si, X es reflexivo.

En consecuencia, la topología de la norma, la topología débil y la topología débil* coinciden si, y sólo si, el espacio es de dimensión finita.

Proposición. Sea $\{x_n^*\}$ una sucesión de puntos en el dual X^* de un espacio normado X y $x^* \in X^*$. Se verifica que:

1. $\{x_n^*\} \xrightarrow{w^*} x^*$ si, y sólo si, $\{x_n^*(x)\} \to x^*(x)$ para todo $x \in X$.

Proposición. Sea $\{x_n^*\}$ una sucesión de puntos en el dual X^* de un espacio normado X y $x^* \in X^*$. Se verifica que:

1. $\{x_n^*\} \xrightarrow{w^*} x^*$ si, y sólo si, $\{x_n^*(x)\} \to x^*(x)$ para todo $x \in X$.
2. Si el espacio X es de Banach y $\{x_n^*\} \xrightarrow{w^*} x^*$, entonces $\{x_n^*\}$ está acotada en norma y $\|x^*\| \leqslant \liminf \{\|x_n^*\|\}$.

Proposición. Sea $\{x_n^*\}$ una sucesión de puntos en el dual X^* de un espacio normado X y $x^* \in X^*$. Se verifica que:

1. $\{x_n^*\} \xrightarrow{w^*} x^*$ si, y sólo si, $\{x_n^*(x)\} \to x^*(x)$ para todo $x \in X$.
2. Si el espacio X es de Banach y $\{x_n^*\} \xrightarrow{w^*} x^*$, entonces $\{x_n^*\}$ está acotada en norma y $\|x^*\| \leqslant \liminf \{\|x_n^*\|\}$.

Proposición. Sea $\{x_n^*\}$ una sucesión de puntos en el dual X^* de un espacio normado X y $x^* \in X^*$. Se verifica que:

1. $\{x_n^*\} \xrightarrow{w^*} x^*$ si, y sólo si, $\{x_n^*(x)\} \to x^*(x)$ para todo $x \in X$.
2. Si el espacio X es de Banach y $\{x_n^*\} \xrightarrow{w^*} x^*$, entonces $\{x_n^*\}$ está acotada en norma y $\|x^*\| \leqslant \liminf \{\|x_n^*\|\}$.

Teorema de separación de convexos para la topología débil-*. Sea X un espacio normado, $A \subset X^*$ un conjunto no vacío, w^*-cerrado y convexo, y $x_0^* \in X^* \setminus A$. Entonces existe $x \in X$ tal que

$$\sup\{\operatorname{Re} a^*(x) : a^* \in A\} < \operatorname{Re} x_0^*(x) \tag{4}$$

Proposición. Sea X un espacio normado de dimensión infinita. Entonces se verifica que:

$$\overline{S_{X^*}}^{\omega^*} = B_{X^*}$$

Proposición. Sea $\{x_n^*\}$ una sucesión de puntos en el dual X^* de un espacio normado X y $x^* \in X^*$. Se verifica que:

1. $\{x_n^*\} \xrightarrow{w^*} x^*$ si, y sólo si, $\{x_n^*(x)\} \to x^*(x)$ para todo $x \in X$.
2. Si el espacio X es de Banach y $\{x_n^*\} \xrightarrow{w^*} x^*$, entonces $\{x_n^*\}$ está acotada en norma y $\|x^*\| \leqslant \liminf \{\|x_n^*\|\}$.

Teorema de separación de convexos para la topología débil-*. Sea X un espacio normado, $A \subset X^*$ un conjunto no vacío, w^*-cerrado y convexo, y $x_0^* \in X^* \setminus A$. Entonces existe $x \in X$ tal que

$$\sup \{\operatorname{Re} a^*(x) : a^* \in A\} < \operatorname{Re} x_0^*(x) \tag{4}$$

Proposición. Sea X un espacio normado de dimensión infinita. Entonces se verifica que:

$$\overline{S_{X^*}}^{\omega^*} = B_{X^*}$$

En consecuencia, la aplicación $x^* \mapsto \|x^*\|$ es w^*-inferiormente semicontinua pero no es $w*$-continua.

Proposición. Sea X un espacio normado y $F \subset X$ tal que $X = \overline{\mathrm{Lin}}(F)$. Sea $\{x_n^*\}$ una sucesión de puntos de X^* que está acotada en norma y $x^* \in X^*$ tal que $\lim \{x_n^*(z)\} = x^*(z)$ para todo $z \in F$. Entonces $\{x_n^*\} \xrightarrow{w^*} x^*$.

Proposición. Sea X un espacio normado y $F \subset X$ tal que $X = \overline{\mathrm{Lin}}(F)$. Sea $\{x_n^*\}$ una sucesión de puntos de X^* que está acotada en norma y $x^* \in X^*$ tal que $\lim \{x_n^*(z)\} = x^*(z)$ para todo $z \in F$. Entonces $\{x_n^*\} \xrightarrow{w^*} x^*$.

Corolario.

1. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en ℓ_∞ y supongamos que existe $x \in \ell_\infty$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(k) = x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $\{x_n\} \xrightarrow{\sigma(\ell_\infty,\ell_1)} x$.

Proposición. Sea X un espacio normado y $F \subset X$ tal que $X = \overline{\mathrm{Lin}}(F)$. Sea $\{x_n^*\}$ una sucesión de puntos de X^* que está acotada en norma y $x^* \in X^*$ tal que $\lim \{x_n^*(z)\} = x^*(z)$ para todo $z \in F$. Entonces $\{x_n^*\} \xrightarrow{w^*} x^*$.

Corolario.

1. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en ℓ_∞ y supongamos que existe $x \in \ell_\infty$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n(k) = x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $\{x_n\} \xrightarrow{\sigma(\ell_\infty, \ell_1)} x$.
2. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en ℓ_1 y supongamos que existe $x \in \ell_1$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n(k) = x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $\{x_n\} \xrightarrow{\sigma(\ell_1, c_0)} x$.

Proposición. Sea X un espacio normado y $F \subset X$ tal que $X = \overline{\operatorname{Lin}}(F)$. Sea $\{x_n^*\}$ una sucesión de puntos de X^* que está acotada en norma y $x^* \in X^*$ tal que $\lim\{x_n^*(z)\} = x^*(z)$ para todo $z \in F$. Entonces $\{x_n^*\} \xrightarrow{w^*} x^*$.

Corolario.

1. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en ℓ_∞ y supongamos que existe $x \in \ell_\infty$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(k) = x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $\{x_n\} \xrightarrow{\sigma(\ell_\infty,\ell_1)} x$.
2. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en ℓ_1 y supongamos que existe $x \in \ell_1$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(k) = x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $\{x_n\} \xrightarrow{\sigma(\ell_1,c_0)} x$.

Proposición. Sea X un espacio normado y $F \subset X$ tal que $X = \overline{\text{Lin}}(F)$. Sea $\{x_n^*\}$ una sucesión de puntos de X^* que está acotada en norma y $x^* \in X^*$ tal que $\lim \{x_n^*(z)\} = x^*(z)$ para todo $z \in F$. Entonces $\{x_n^*\} \xrightarrow{w^*} x^*$.

Corolario.

1. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en ℓ_∞ y supongamos que existe $x \in \ell_\infty$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n(k) = x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $\{x_n\} \xrightarrow{\sigma(\ell_\infty,\ell_1)} x$.
2. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en ℓ_1 y supongamos que existe $x \in \ell_1$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n(k) = x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $\{x_n\} \xrightarrow{\sigma(\ell_1,c_0)} x$.

Sea X un conjunto cualquiera no vacío, y sea $\{Y_x : x \in X\}$ una familia de conjuntos no vacíos. El producto cartesiano de dicha familia se representa por $\prod_{x\in X} Y_x$ y es el conjunto de todas las aplicaciones $f : X \to \bigcup_{x\in X} Y_x$ tales que $f(x) \in Y_x$ para todo $x \in X$.

Proposición. Sea X un espacio normado y $F \subset X$ tal que $X = \overline{\text{Lin}}(F)$. Sea $\{x_n^*\}$ una sucesión de puntos de X^* que está acotada en norma y $x^* \in X^*$ tal que lím $\{x_n^*(z)\} = x^*(z)$ para todo $z \in F$. Entonces $\{x_n^*\} \xrightarrow{w^*} x^*$.

Corolario.

1. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en ℓ_∞ y supongamos que existe $x \in \ell_\infty$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n(k) = x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $\{x_n\} \xrightarrow{\sigma(\ell_\infty,\ell_1)} x$.
2. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en ℓ_1 y supongamos que existe $x \in \ell_1$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n(k) = x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $\{x_n\} \xrightarrow{\sigma(\ell_1,c_0)} x$.

Sea X un conjunto cualquiera no vacío, y sea $\{Y_x : x \in X\}$ una familia de conjuntos no vacíos. El producto cartesiano de dicha familia se representa por $\prod_{x\in X} Y_x$ y es el conjunto de todas las aplicaciones $f : X \to \bigcup_{x\in X} Y_x$ tales que $f(x) \in Y_x$ para todo $x \in X$.Para cada $x \in X$ se define la aplicación $\pi_x : \prod_{x\in X} Y_x \to Y_x$ por $\pi_x(f) = f(x)$ para toda $f \in \prod_{x\in X} Y_x$.

Proposición. Sea X un espacio normado y $F \subset X$ tal que $X = \overline{\mathrm{Lin}}(F)$. Sea $\{x_n^*\}$ una sucesión de puntos de X^* que está acotada en norma y $x^* \in X^*$ tal que $\lim \{x_n^*(z)\} = x^*(z)$ para todo $z \in F$. Entonces $\{x_n^*\} \xrightarrow{w^*} x^*$.

Corolario.

1. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en ℓ_∞ y supongamos que existe $x \in \ell_\infty$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(k) = x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $\{x_n\} \xrightarrow{\sigma(\ell_\infty,\ell_1)} x$.
2. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en ℓ_1 y supongamos que existe $x \in \ell_1$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(k) = x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $\{x_n\} \xrightarrow{\sigma(\ell_1,c_0)} x$.

Sea X un conjunto cualquiera no vacío, y sea $\{Y_x : x \in X\}$ una familia de conjuntos no vacíos. El producto cartesiano de dicha familia se representa por $\prod\limits_{x\in X} Y_x$ y es el conjunto de todas las aplicaciones $f : X \to \bigcup\limits_{x\in X} Y_x$ tales que $f(x) \in Y_x$ para todo $x \in X$.Para cada $x \in X$ se define la aplicación $\pi_x : \prod\limits_{x\in X} Y_x \to Y_x$ por $\pi_x(f) = f(x)$ para toda $f \in \prod\limits_{x\in X} Y_x$.Tales aplicaciones reciben el nombre de “proyecciones”.

Supongamos ahora que cada Y_x es un espacio topológico $(Y_x, \mathcal{T}_x)$. En tal caso se define la **topología producto** en $\prod_{x \in X} Y_x$ como la topología inicial para la familia de funciones $\{\pi_x : x \in X\}$, es decir, es la más pequeña topología en $\prod_{x \in X} Y_x$ que hace continuas a las proyecciones.

Supongamos ahora que cada Y_x es un espacio topológico $(Y_x, \mathcal{T}_x)$. En tal caso se define la **topología producto** en $\prod_{x\in X} Y_x$ como la topología inicial para la familia de funciones $\{\pi_x : x \in X\}$, es decir, es la más pequeña topología en $\prod_{x\in X} Y_x$ que hace continuas a las proyecciones.

Una base de dicha topología está formada por los conjuntos de la forma

$$\bigcap_{x\in J} \pi_x^{-1}(U_x) = \bigcap_{x\in J} \left\{ f \in \prod_{x\in X} Y_x : f(x) \in U_x \right\}, \quad U_x \in \mathcal{B}_x \text{ y } J \subset X, \; J \text{ finito}$$

donde $\mathcal{B}_x$ es una base de $\mathcal{T}_x$.

Supongamos ahora que cada Y_x es un espacio topológico $(Y_x, \mathcal{T}_x)$. En tal caso se define la **topología producto** en $\prod_{x\in X} Y_x$ como la topología inicial para la familia de funciones $\{\pi_x : x \in X\}$, es decir, es la más pequeña topología en $\prod_{x\in X} Y_x$ que hace continuas a las proyecciones.

Una base de dicha topología está formada por los conjuntos de la forma

$$\bigcap_{x\in J} \pi_x^{-1}(U_x) = \bigcap_{x\in J} \left\{ f \in \prod_{x\in X} Y_x : f(x) \in U_x \right\}, \quad U_x \in \mathcal{B}_x \text{ y } J \subset X, \ J \text{ finito}$$

donde $\mathcal{B}_x$ es una base de $\mathcal{T}_x$.

Teorema de Tychonoff. El producto de una familia de espacios topológicos compactos con la topología producto es un espacio topológico compacto.

Supongamos ahora que cada Y_x es un espacio topológico $(Y_x, \mathcal{T}_x)$. En tal caso se define la **topología producto** en $\prod_{x\in X} Y_x$ como la topología inicial para la familia de funciones $\{\pi_x : x \in X\}$, es decir, es la más pequeña topología en $\prod_{x\in X} Y_x$ que hace continuas a las proyecciones.

Una base de dicha topología está formada por los conjuntos de la forma

$$\bigcap_{x\in J} \pi_x^{-1}(U_x) = \bigcap_{x\in J} \left\{ f \in \prod_{x\in X} Y_x : f(x) \in U_x \right\}, \quad U_x \in \mathcal{B}_x \text{ y } J \subset X, \ J \text{ finito}$$

donde $\mathcal{B}_x$ es una base de $\mathcal{T}_x$.

Teorema de Tychonoff. El producto de una familia de espacios topológicos compactos con la topología producto es un espacio topológico compacto.

Nos interesa el caso particular en que para todo $x \in X$ se tiene que $Y_x = \mathbb{K}$, en cuyo caso el producto $\prod_{x\in X} Y_x = \mathbb{K}^X$ son todas las funciones de X en $\mathbb{K}$, y una base de entornos abiertos de un punto $f_0 \in \mathbb{K}^X$ la forman los conjuntos de la forma

$$U(f_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} \left\{ f \in \mathbb{K}^X : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon \right\} \tag{5}$$

donde $\varepsilon > 0$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son elementos de X y $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos ahora que X es un espacio normado. Los elementos de X^* son funciones de X en $\mathbb{K}$, por lo que $X^* \subset \mathbb{K}^X$ y $(X^*, \sigma(X^*, X))$ es un subespacio topológico de $\mathbb{K}^X$ con la topología producto, pues una base de w^*-entornos abiertos de un punto $x_0^* \in X^*$ está formada por los conjuntos

$$
\begin{aligned}
V(x_0^*, x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon) &= \bigcap_{i=1}^{n} \{x^* \in X^* : |x^*(x_i) - x_0^*(x_i)| < \varepsilon\} = \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} \left\{ f \in \mathbb{K}^X : |f(x_i) - x_0^*(x_i)| < \varepsilon \right\} \bigcap X^* = \\
&= U(x_0^*, x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon) \cap X^*
\end{aligned}
$$

Supongamos ahora que X es un espacio normado. Los elementos de X^* son funciones de X en $\mathbb{K}$, por lo que $X^* \subset \mathbb{K}^X$ y $(X^*, \sigma(X^*, X))$ es un subespacio topológico de $\mathbb{K}^X$ con la topología producto, pues una base de w^*-entornos abiertos de un punto $x_0^* \in X^*$ está formada por los conjuntos

$$\begin{aligned} V(x_0^*, x_1, x_2, \dots, x_n, \varepsilon) &= \bigcap_{i=1}^{n} \{x^* \in X^* : |x^*(x_i) - x_0^*(x_i)| < \varepsilon\} = \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} \left\{ f \in \mathbb{K}^X : |f(x_i) - x_0^*(x_i)| < \varepsilon \right\} \bigcap X^* = \\ &= U(x_0^*, x_1, x_2, \dots, x_n, \varepsilon) \cap X^* \end{aligned}$$

Como para todo funcional $f \in B_{X^*}$ se tiene que $|f(x)| \leqslant \|x\|$ para todo $x \in X$, si notamos $D_x = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leqslant \|x\|\}$, los funcionales $f \in B_{X^*}$ son elementos del producto $\prod_{x \in X} D_x$, esto es $B_{X^*} \subset \prod_{x \in X} D_x$.

Supongamos ahora que X es un espacio normado. Los elementos de X^* son funciones de X en $\mathbb{K}$, por lo que $X^* \subset \mathbb{K}^X$ y $(X^*, \sigma(X^*, X))$ es un subespacio topológico de $\mathbb{K}^X$ con la topología producto, pues una base de w^*-entornos abiertos de un punto $x_0^* \in X^*$ está formada por los conjuntos

$$\begin{aligned} V(x_0^*, x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon) &= \bigcap_{i=1}^{n} \{x^* \in X^* : |x^*(x_i) - x_0^*(x_i)| < \varepsilon\} = \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} \left\{ f \in \mathbb{K}^X : |f(x_i) - x_0^*(x_i)| < \varepsilon \right\} \bigcap X^* = \\ &= U(x_0^*, x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon) \cap X^* \end{aligned}$$

Como para todo funcional $f \in B_{X^*}$ se tiene que $|f(x)| \leqslant \|x\|$ para todo $x \in X$, si notamos $D_x = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leqslant \|x\|\}$, los funcionales $f \in B_{X^*}$ son elementos del producto $\prod_{x \in X} D_x$, esto es $B_{X^*} \subset \prod_{x \in X} D_x$.Por supuesto $\prod_{x \in X} D_x \subset \mathbb{K}^X$. Como los D_x son compactos, el teorema de Tychonoff nos dice que $\prod_{x \in X} D_x$ es un compacto en el espacio topológico producto $\mathbb{K}^X$. Ya está todo preparado para el siguiente resultado, uno de los más útiles del Análisis Funcional.

Teorema de Banach – Alaoglu. La bola cerrada unidad del dual de un espacio normado es w^*-compacta. Como consecuencia, todo subconjunto del dual de un espacio normado que sea w^*-cerrado y acotado en norma es w^*-compacto.

Teorema de Banach – Alaoglu. La bola cerrada unidad del dual de un espacio normado es w^*-compacta. Como consecuencia, todo subconjunto del dual de un espacio normado que sea w^*-cerrado y acotado en norma es w^*-compacto.

Teorema de Goldstine. Si X es un espacio normado, entonces $J(B_X)$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$-denso en $B_{X^{**}}$. En consecuencia, $J(X)$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$-denso en X^{**}.

Teorema de Banach – Alaoglu. La bola cerrada unidad del dual de un espacio normado es w^*-compacta. Como consecuencia, todo subconjunto del dual de un espacio normado que sea w^*-cerrado y acotado en norma es w^*-compacto.

Teorema de Goldstine. Si X es un espacio normado, entonces $J(B_X)$ es $\sigma(X^{**},X^*)$-denso en $B_{X^{**}}$. En consecuencia, $J(X)$ es $\sigma(X^{**},X^*)$-denso en X^{**}.

Corolario. Sea X un espacio normado de dimensión infinita. Entonces, $J(S_X)$ es denso en $B_{X^{**}}$ para la topología $\sigma(X^{**},X^*)$.

Teorema de Banach – Alaoglu. La bola cerrada unidad del dual de un espacio normado es w^*-compacta. Como consecuencia, todo subconjunto del dual de un espacio normado que sea w^*-cerrado y acotado en norma es w^*-compacto.

Teorema de Goldstine. Si X es un espacio normado, entonces $J(B_X)$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$-denso en $B_{X^{**}}$. En consecuencia, $J(X)$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$-denso en X^{**}.

Corolario. Sea X un espacio normado de dimensión infinita. Entonces, $J(S_X)$ es denso en $B_{X^{**}}$ para la topología $\sigma(X^{**}, X^*)$.

Teorema de Dieudonné. Un espacio normado es reflexivo si, y sólo si, su bola unidad es débilmente compacta. En consecuencia, cualquier conjunto w-cerrado y acotado en norma de un espacio reflexivo es w-compacto.

Teorema de Banach – Alaoglu. La bola cerrada unidad del dual de un espacio normado es w^*-compacta. Como consecuencia, todo subconjunto del dual de un espacio normado que sea w^*-cerrado y acotado en norma es w^*-compacto.

Teorema de Goldstine. Si X es un espacio normado, entonces $J(B_X)$ es $\sigma(X^{**},X^*)$-denso en $B_{X^{**}}$. En consecuencia, $J(X)$ es $\sigma(X^{**},X^*)$-denso en X^{**}.

Corolario. Sea X un espacio normado de dimensión infinita. Entonces, $J(S_X)$ es denso en $B_{X^{**}}$ para la topología $\sigma(X^{**},X^*)$.

Teorema de Dieudonné. Un espacio normado es reflexivo si, y sólo si, su bola unidad es débilmente compacta. En consecuencia, cualquier conjunto w-cerrado y acotado en norma de un espacio reflexivo es w-compacto.

Corolario. Dado un espacio normado X, existe un espacio topológico compacto de Hausdorff, K, tal que X es isométricamente isomorfo a un subespacio de $C(K)$.

Se dice que un espacio topológico es *metrizable* si existe una distancia que induce la topología o, equivalentemente, es homeomorfo a un espacio métrico.

Se dice que un espacio topológico es *metrizable* si existe una distancia que induce la topología o, equivalentemente, es homeomorfo a un espacio métrico.

Proposición. Sea X un espacio normado.

Se dice que un espacio topológico es *metrizable* si existe una distancia que induce la topología o, equivalentemente, es homeomorfo a un espacio métrico.

Proposición. Sea X un espacio normado.

1. Si X es separable, entonces (B_{X^*}, ω^*) es metrizable y, por tanto, lo mismo le pasa a cualquier subconjunto acotado de X^*.

Se dice que un espacio topológico es *metrizable* si existe una distancia que induce la topología o, equivalentemente, es homeomorfo a un espacio métrico.

Proposición. Sea X un espacio normado.

1. Si X es separable, entonces (B_{X^*}, ω^*) es metrizable y, por tanto, lo mismo le pasa a cualquier subconjunto acotado de X^*.
2. Si X^* es separable, entonces (B_X, ω) es metrizable y, por tanto, lo mismo le pasa a cualquier subconjunto acotado de X.

Se dice que un espacio topológico es *metrizable* si existe una distancia que induce la topología o, equivalentemente, es homeomorfo a un espacio métrico.

Proposición. Sea X un espacio normado.

1. Si X es separable, entonces (B_{X^*}, ω^*) es metrizable y, por tanto, lo mismo le pasa a cualquier subconjunto acotado de X^*.
2. Si X^* es separable, entonces (B_X, ω) es metrizable y, por tanto, lo mismo le pasa a cualquier subconjunto acotado de X.

Se dice que un espacio topológico es *metrizable* si existe una distancia que induce la topología o, equivalentemente, es homeomorfo a un espacio métrico.

Proposición. Sea X un espacio normado.

1. Si X es separable, entonces (B_{X^*}, ω^*) es metrizable y, por tanto, lo mismo le pasa a cualquier subconjunto acotado de X^*.
2. Si X^* es separable, entonces (B_X, ω) es metrizable y, por tanto, lo mismo le pasa a cualquier subconjunto acotado de X.

Teorema de Bolzano–Weierstrass para la topología débil. Toda sucesión acotada en un espacio normado reflexivo tiene alguna sucesión parcial débilmente convergente.

Se dice que un espacio topológico es *metrizable* si existe una distancia que induce la topología o, equivalentemente, es homeomorfo a un espacio métrico.

Proposición. Sea X un espacio normado.

1. Si X es separable, entonces (B_{X^*}, ω^*) es metrizable y, por tanto, lo mismo le pasa a cualquier subconjunto acotado de X^*.
2. Si X^* es separable, entonces (B_X, ω) es metrizable y, por tanto, lo mismo le pasa a cualquier subconjunto acotado de X.

Teorema de Bolzano–Weierstrass para la topología débil. Toda sucesión acotada en un espacio normado reflexivo tiene alguna sucesión parcial débilmente convergente.

Teorema de Bolzano–Weierstrass para la topología débil-*. Toda sucesión acotada en el dual de un espacio normado separable tiene alguna sucesión parcial débil-* convergente.